



Università degli studi di Roma *La Sapienza*
Esame di Meccanica applicata alle macchine

per allievi del Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale (*Prof. N.P. Belfiore*)

Esercitazione N.7 (V.O)

*Esercitazione di gruppo¹ sui
metodi analitici nella analisi cinematica dei sistemi meccanici*

Sia assegnato un quadrilatero articolato caratterizzato dalle seguenti lunghezze della aste:

lunghezza manovella	=	35 cm;
lunghezza biella	=	90 cm;
lunghezza bilanciata	=	70 cm;
lunghezza telaio	=	100 cm.

Mediante la regola del Grashov si determini la classe di appartenenza del suddetto quadrilatero.

Metodo analitico esatto

Mediante le formule

$$\sin \vartheta = \frac{2 \tan \frac{\vartheta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\vartheta}{2}} \quad \cos \vartheta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\vartheta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\vartheta}{2}} \quad (1)$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = -\frac{r_1 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{r_3 \sin(\vartheta_3 - \vartheta_2)} \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{r_1 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_3)}{r_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \quad (2)$$

$$\vec{v}_E = ir_1 \omega_1 e^{i\theta_1} + ir_E \omega_2 e^{i(\vartheta_2 + \vartheta_E)} \quad (3)$$

¹ Ogni gruppo può essere costituito da un minimo di due studenti fino ad un massimo di quattro. Ogni studente dovrà riportare la relazione ed i risultati ottenuti sul proprio quaderno individuale, indicando, all'inizio del testo della relazione, i nomi dei colleghi facenti parte del gruppo di esercitazione. In ogni caso, è consentito lo svolgimento dell'esercitazione in forma individuale.

$$\alpha_3 = -\frac{\alpha_1 r_1 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) + r_1 \omega_1^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + r_2 \omega_2^2 + r_3 \omega_3^2 \cos(\vartheta_3 - \vartheta_2)}{r_3 \sin(\vartheta_3 - \vartheta_2)} \quad (4)$$

$$\alpha_2 = -\frac{\alpha_1 r_1 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_3) + r_1 \omega_1^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_3) + r_2 \omega_2^2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_3) + r_3 \omega_3^2}{r_2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \quad (5)$$

$$\bar{a}_E = ir_1 \alpha_1 e^{i\theta_1} - \omega_1^2 r_1 e^{i\theta_1} + ir_E \alpha_2 e^{i(\vartheta_2 + \vartheta_E)} - \omega_2^2 r_E e^{i(\vartheta_2 + \vartheta_E)} \quad (6)$$

$$x_{\Omega E} = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \quad y_{\Omega E} = y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \quad (7)$$

ricavate col metodo dei numeri complessi, si determini:

- la traiettoria di un punto di biella M scelto a piacere (avendo cura di non scegliere, ovviamente, uno dei due centri delle cerniere di biella), ricavata per un congruo numero di punti e per un giro completo della manovella, presentandone una rappresentazione in scala ottenuta mediante un qualsiasi programma di grafica su PC o altro elaboratore;
- il diagramma delle velocità angolari del bilanciante in funzione dell'angolo di manovella, assumendo una velocità angolare (antioraria) di manovella costante e pari ad 1 rad/s;
- il diagramma delle accelerazioni angolari in funzione dell'angolo di manovella (assumendo sempre costante e unitaria la velocità angolare della manovella).

Metodo generale delle equazioni di vincolo

Servendosi delle relazioni ricavate a lezione:

$$[y]_m^{i+1} = [y]_m^i - \left([J_y]_{m \times m}^i \right)^{-1} [f]_m^i \quad , \quad (8)$$

$$[\dot{y}]_m = - \left([J_y]_{m \times m} \right)^{-1} [J_x]_{m \times F} [\dot{x}]_F \quad , \quad (9)$$

$$[\ddot{y}]_m = - \left([J_y]_{m \times m} \right)^{-1} [J_x]_{m \times F} [\ddot{x}]_F - \left([J_y]_{m \times m} \right)^{-1} [\mathcal{Y}]_m \quad , \quad (10)$$

e ricordando che la matrice inversa di A

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

è pari a

$$INVERSA_DI_A := \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} & -\frac{a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \end{bmatrix},$$

si determinino per via numerica approssimata ed in corrispondenza di una rotazione (antioraria) di 30° della manovella valutata a partire dalla posizione di sovrapposizione della manovella stessa al telaio (si suppone, quindi, che la manovella sia incernierata alla sinistra della cerniera collegante telaio e bilanciere):

- la configurazione del quadrilatero;
- le velocità angolari della biella e del bilanciere, assumendo una velocità angolare di manovella costante e pari ad 1 rad/s;
- accelerazioni angolari della biella e del bilanciere (assumendo sempre costante e unitaria la velocità angolare della manovella).

Confronto tra i due metodi

Si confrontino i risultati ottenuti con i due diversi metodi e si esprimano gli errori percentuali che il metodo numerico comporta rispetto a quello analitico.